9/11/2018

$V : \oplus \quad V \times V \to V$

$\quad\; \odot \quad R \times V \to V$

$V = \{1, 2, 3\}$ Αν οι πράξεις είναι καλά ορισμένες

ΕΡΩΤΗΜΑ

Ποιός είναι ο πιο "οικονομικός" τρόπος να περιγράψει ένα δ.χ. και από τι εξαρτάται.

Πότε δύο δ.χ. είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

π.χ. $\mathbb{R}^2$ με τις συνήθεις πράξεις δ.χ.
Τυχαίο στοιχ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)$

$(1,0)$, $(0,1)$

Αυτά τα δύο διανύσματα μας τα δίνουν όλα σαν γραμμικό συνδυασμό
Τα χρειαζόμαστε και τα 2. Μπορεί να γίνει αυτό με άλλα ζευγάρια; ΝΑΙ.
Πως τα επιλέγουμε;
Πάρε το $(1,0)$ και δημιούργησε ένα σύνολο με τα πολ/σιά του $\{t(1,0)\mid t\in\mathbb{R}\}$
$t(1,0)+t'(1,0)=(t+t')(1,0)=$ $c(t(1,0))=(t(1,0))$
Το σύνολο $\{t(1,0)=(t,0)$ είναι ένας μικρότερος δ.χ. που "ζει" μέσα στον $\mathbb{R}^2$
Άρα $\forall$ ευθεία που περνάει από το $(0,0)$ είναι ένας δ.χ. που "ζει" στο $\mathbb{R}^2$
$\{V'' = \{t(a,b)\mid t\in\mathbb{R}\}$ δ.χ. που "ζει" μέσα στο $\mathbb{R}\}$
Ο μικρότερος δ.χ. είναι ο $(0,0)$

Στον $\mathbb{R}^2$ "μικρότεροι" δ.χ. ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$ και το $(0,0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V δ.χ και $Y\subseteq V$ το Y με τις πράξεις του V θα καλείται δ.υποχ. αν είναι δ.χ. από μόνος του. Συμβολίζουμε $Y\le V$

Πρόταση: Έστω V δ.χ. και $Y\subseteq V$, το Y είναι υποχ. του V $\iff$ οι πράξεις είναι καλά ορισμένες στο Y.
Δηλαδή $\forall v_1,v_2\in Y \to v_1\oplus v_2\in Y$ και $cv_1\in Y\ \forall c\in\mathbb{R}$

Αποδ. "$\Rightarrow$" Εφόσων $Y \subseteq V$ οι πράξεις είναι καλά ορισμένες άρα ισχύουν οι δύο ιδιότητες.

"$\Leftarrow$" Πρέπει ν.δ.ο. είναι δ.χ. όταν ισχύουν οι 2 ιδιότητες. Δηλαδή οι πράξεις είναι καλά ορισμένες και ισχύουν οι ιδιότητες του δ.χ. Οι πράξεις ισχύουν από τις ιδιότητες. Οι ιδιότητες ισχύουν στο V και άρα ισχύουν στον Y. Διότι $v_1, v_2, v_3 \in Y \subseteq V \to (v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$ ισχύει στον V, άρα και στον Y. Διότι η πράξη είναι καλά ορισμένη:

$\exists\, e$ μηδενικό διαν. στον Y

$\exists\, e \in V$ Αλλά $e \in Y$ διότι $\exists u \in Y \to c \cdot u \in Y \to 0 \cdot u \in Y \to$
$e = 0u \in Y$

$\forall u \in Y \Rightarrow -u \in Y$

$\Rightarrow c \cdot u \in Y \Rightarrow -1u = -u \in Y$

Οι οποίες ισχύουν διότι ισχύουν στον V και η πράξη είναι κλειστή.

π.χ. $V = M(3\times 1, \mathbb{R})$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right.$$

$Y \subseteq V$

Πρέπει να δ.ο. ισχύουν οι δύο ιδιότητες.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{a+a'} \\ \cancel{b+b'} \\ a+\cancel{a'+b}+b' \end{pmatrix} \in Y$$

$$c\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \\ c(a+b) \end{pmatrix} \in Y \text{ ισχύει} \Rightarrow Y \leq V$$

π.χ. $Y' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι $Y' \leq V$; όχι γιατί

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Y'$$

π.χ. $V = P_{\infty}$ όλα τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές

$Y = \{ f \in P_{\infty}$ και $f(5) = 0 \}$

5 ρίζα του $f(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-5)\cdot g(x)$

Για να είναι $Y \leq V$ πρέπει

$f, f' \in Y \Rightarrow f + f' \in Y$

$\Downarrow$ $\quad cf \in Y$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x-5)g(x) \\ f'(x) &= (x-5)g'(x) \end{aligned}\right\} \rightarrow f(x) + f'(x) = (x-5)\,(g(x) + g'(x)) \Rightarrow f + f' \in Y$$

$$cf(x) = c\cdot(x-5)g(x) = (x-5)\, c\cdot g(x) \in Y$$

$Y'' = \{ f(x) \in P_{\infty}$ και $f(5) = 1 \}$

Είναι $Y' \leq V$;;; Όχι Διότι το μηδενικό διάνυσμα δηλ. το μηδενικό πολυώνυμο $\notin$ στο σύνολο Y''

Άρα $Y'' \notin V$

Πρόταση 1) Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι ο μηδενικός, δηλ. το σύνολο $\{(0,0)\}$, ο εαυτός του και η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2) Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι ο μηδενικός $\{(0,0,0)\}$, ο εαυτός του κάθε επίπεδο που διέρχ. από την αρχή των αξόνων (δηλ. περιέχει το $(0,0,0)$) και κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ περιγράφεται με ένα διάνυσμα.

Για να περιγράψω επίπεδο χρειαζόμαστε δύο μη-συνευθειακά και το μηδενικό σημείο. $\{(0,0,0)\}$